DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

Relaciones difusas

© Fernando Berzal, berzal@acm.org

Relaciones difusas

- Definición
- Propiedades
- Caso práctico (Java & C#)
- Operaciones con relaciones difusas

Definición

- Una relación difusa entre elementos de universos X, Y… es un subconjunto difuso del producto cartesiano de dichos universos.

- Mientras que en la teoría de conjuntos clásica los elementos de una tupla del producto cartesiano están o no en la relación, en una relación difusa cada tupla viene caracterizada por un valor en [0,1] que mide en qué grado dichos elementos están relacionados.

- Las relaciones mas interesantes son las binarias, p.ej. "X es igual a Y" (en términos difusos).

Definición

EJEMPLO

Relación difusa R: "x es aproximadamente igual que y"

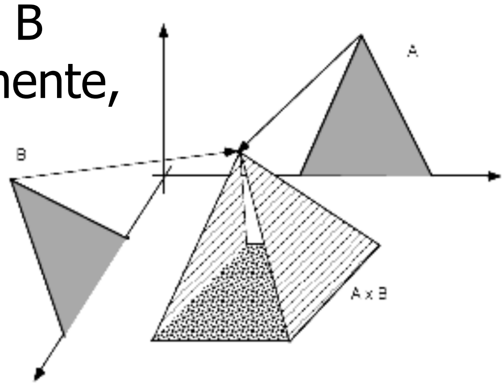
X \ Y	1	2	3	4
1	1	0.5	0.1	0.0
2	0.5	1	0.5	0.1
3	0.1	0.5	1	0.5
4	0.0	0.1	0.5	1

La tabla muestra el grado en el que los elementos de ambos universos (X y Y) están relacionados entre sí. En este caso, X=Y

Definición

EJEMPLO

El producto cartesiano de dos s.d. A y B sobre los universos X e Y, respectivamente, definido como:



$$A \times B\,(u,v) = \min\{A(u), B(v)\}$$

genera una relación binaria difusa en $X \times Y$

Propiedades

En las relaciones difusas binarias con X=Y, se pueden encontrar propiedades que extienden las que se dan en las relaciones clásicas:

- **Reflexividad**: $R(x,x) = 1 \qquad \forall x$
- **Simetría**: $R(x,y) = R(y,x) \qquad \forall\, x,y$
- **Antisimetría**: $R(x,y) \neq R(y,x) \qquad \forall\, x,y$
- **Transitividad (max-min)**:

$$R(x,y) \geq \sup\{\min\{R(x,u),R(u,y)\} \mid u\}$$

Propiedades

Por medio de estas propiedades, se pueden definir diversos tipos de relaciones difusas:

- **Semejanza [resemblance]**:
  Reflexiva y simétrica
- **Similitud [similarity]**:
  Reflexiva, simétrica y transitiva (max-min)
- **Orden [order]**:
  Reflexiva, antisimétrica y transitiva (max-min)

Propiedades

Con respecto a las relaciones en teoría clásica de conjuntos:

- Todo α-corte de una similitud es una relación de equivalencia clásica.
- Todo α-corte de relación de orden difusa es una relación de orden clásica.

Caso práctico (Java & C#)

Enabling Fuzzy Object Comparison in Modern Programming Platforms through Reflection*

Fernando Berzal, Juan-Carlos Cubero, Nicolás Marín, and Olga Pons

IDBIS Research Group - Dept. of Computer Science and A. I.,
E.T.S.I.I. - University of Granada, 18071, Granada, Spain
{fberzal|jc.cubero|nicm|opc}@decsai.ugr.es

Caso práctico (Java & C#)

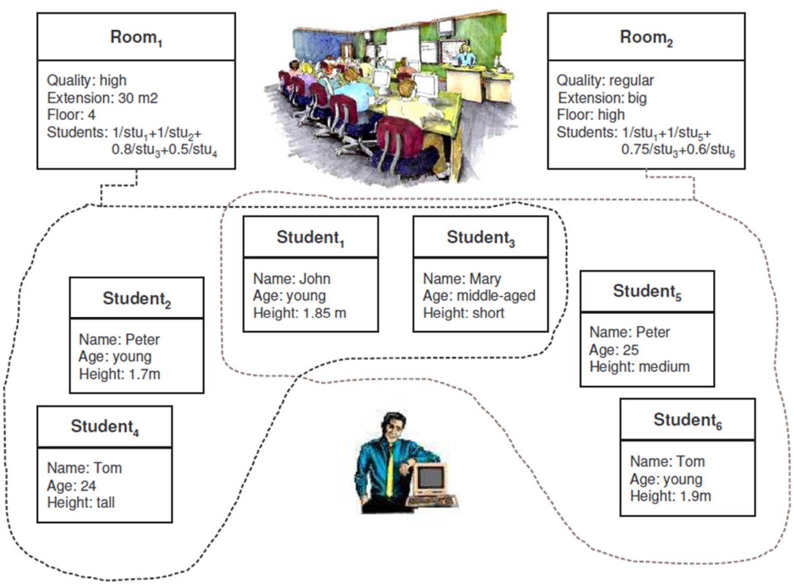
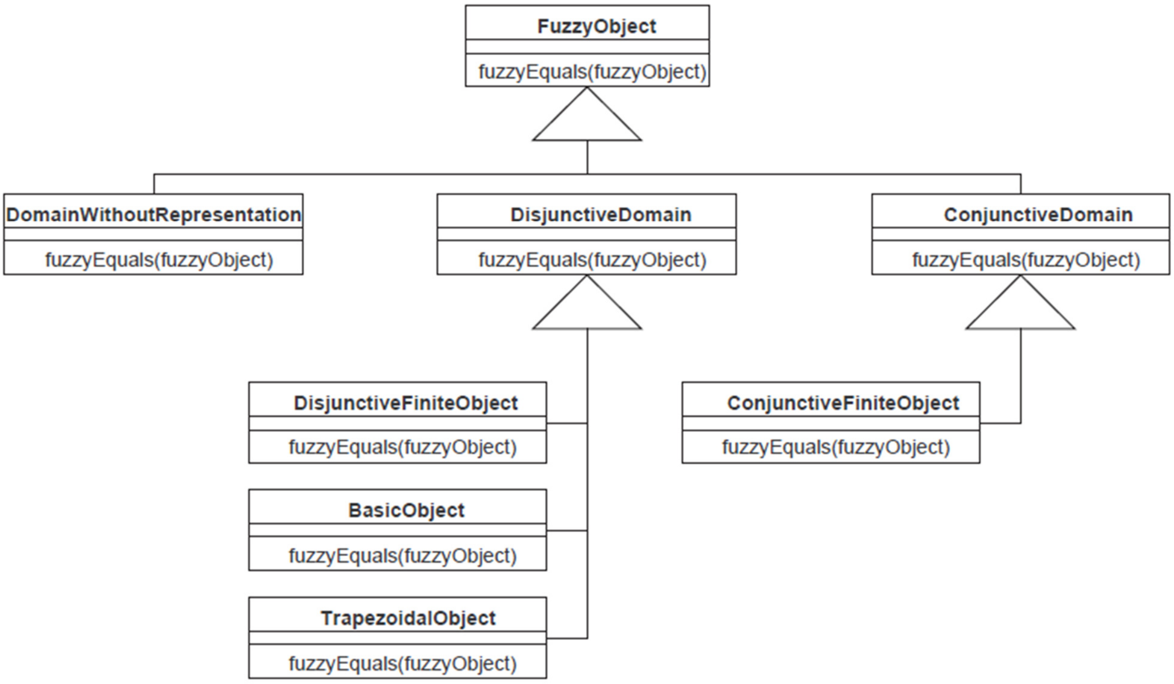


Fig. 1. Fuzzily-described rooms and students

```
"room1 fvs. room2 = " + room1.FuzzyEquals(room2)
"room2 fvs. room1 = " + room2.FuzzyEquals(room1)
```

Caso práctico (Java & C#)



Operaciones

Proyección

- El proceso de proyección consigue reducir una relación (dos dimensiones) a un conjunto difuso (una sola dimensión).

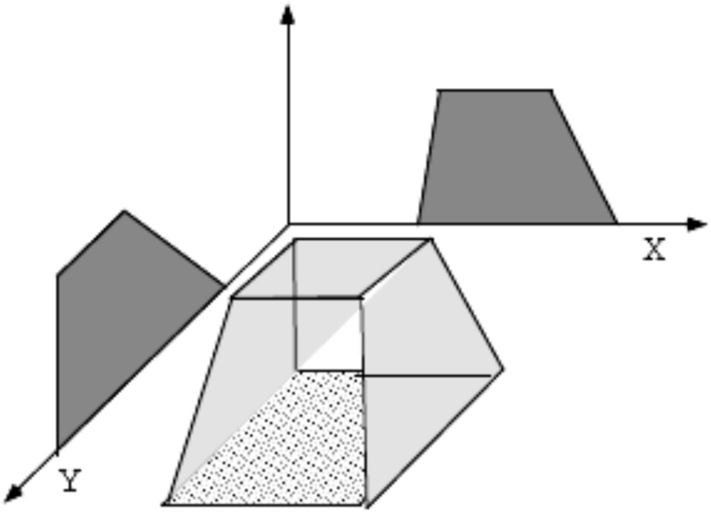
- La proyección de la relación R sobre Y se define como el subconjunto difuso de Y con función de pertenencia

  $$PRY(R,Y)\ (y) = \sup \{ R(x,y) | x \}$$

  Esto es, para cada valor de y, el máximo valor R(x,y).

Operaciones

Proyección



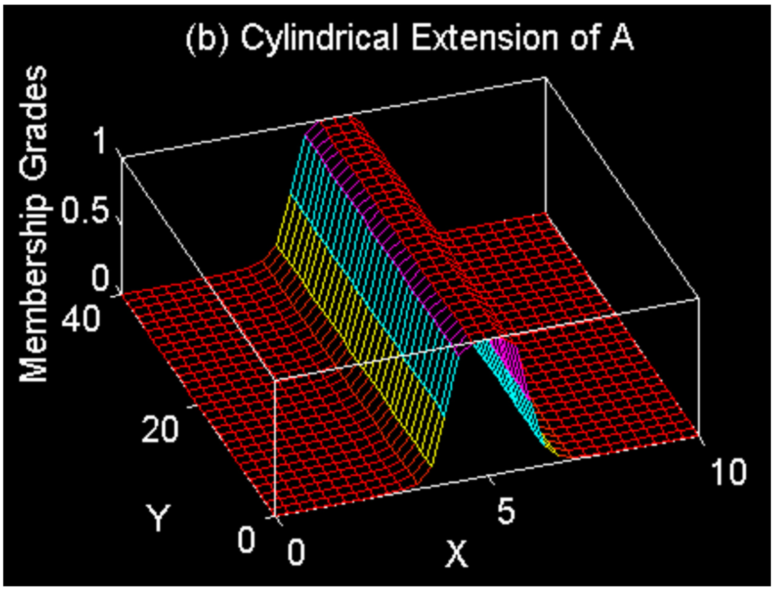
Operaciones

Extensión cilíndrica [CE]

- Operación inversa a la proyección: A partir de un conjunto difuso, obtenemos una relación.
- La extensión consiste en asignar el valor de la función de pertenencia de x a cada tupla de la relación en la que aparece x.
- Si A es un subconjunto difuso de un universo X e Y es otro universo cualquiera, la extensión cilíndrica de A a $X \times Y$ es la relación difusa: **EC(A)(x,y) = A(x)** $\forall y \in Y$.

Operaciones

Extensión cilíndrica [CE]



Operaciones

Composición (∘)

Operación que se efectúa entre un conjunto difuso y una relación, dando como resultado un conjunto difuso:

B = A ∘ R = PRY(EC(A) ∩ R)

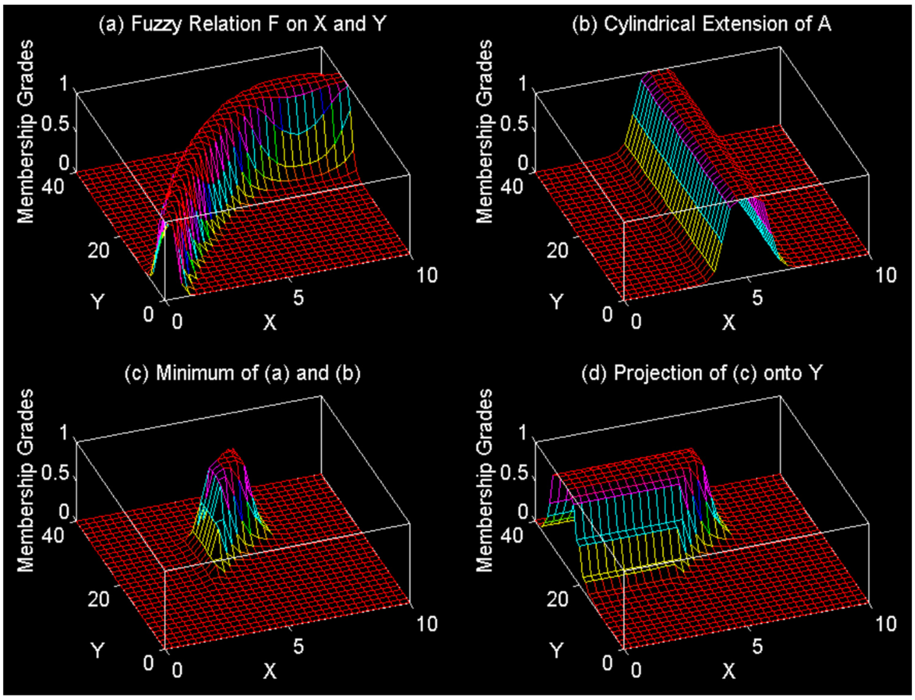
Dados el conjunto difuso A y la relación R(X,Y), se obtiene un conjunto difuso B:

1. Extensión cilíndrica de A
2. Intersección de la dos relaciones
3. Proyección sobre Y

Operaciones

Composición (∘)

B = A ∘ R = PRY(EC(A) ∩ R)



Operaciones

Composición (∘)

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

'Alicia es algo más alta que Lucía'

(una relación difusa)

'Alicia es muy alta'

(una proposición)

¿Cómo es Lucía?

(proposición conclusión)

Operaciones

Composición (◦)

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

X \ Y	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
1.70	0.4	0.1	0	0	0
1.725	0.7	0.4	0.1	0	0
1.75	1	0.7	0.4	0.1	0
1.775	0.7	1	0.7	0.4	0.1
1.80	0.4	0.7	1	0.7	0.4

Relación 'algo más alta que'

Se describe por 'aproximadamente 5 cm más alta que' (cuando la altura de X supera la de Y por 5 cm, hallamos un 1 en la función de pertenencia).

Operaciones

Composición (◦)

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

altura	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
M(altura)	0.0	0.1	0.4	0.7	1.0

Descripción difusa de "muy alta"

("muy alto" podría ser diferente)

En este caso, "Alicia es muy alta" (A).

altura	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
ALICIA	0.0	0.1	0.4	0.7	1.0

Tenemos que componer el conjunto difuso "Alicia es muy alta" con la relación "algo más alta que"...

Operaciones

Composición (∘) $A \circ R = PRY(EC(A) \cap R)$

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

A\L	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
1.70	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.75	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
1.775	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
1.80	1	1	1	1	1

1. Extensión cilíndrica del conjunto difuso

¡OJO! La operación no es simétrica,
por lo que hay que tener cuidado.

Operaciones

Composición (∘) $A \circ R = PRY(EC(A) \cap R)$

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

A\L	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
1.70	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0	0
1.75	0.4	0.4	0.4	0.1	0
1.775	0.7	0.7	0.7	0.4	0.1
1.80	0.4	0.7	1	0.7	0.4

2. Intersección de las dos relaciones

La relación 'algo más alto que' (que relaciona un universo con otro) y la que hemos obtenido mediante la extensión cilíndrica, usando la t-norma del mínimo.

Operaciones

Composición (∘) $A \circ R = PRY(EC(A) \cap R)$

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

altura	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
LUCÍA	0.7	0.7	1	0.7	0.4

3. Proyección (máximo de cada columna)

(proyección sobre el universo de Lucía)

Observamos que el conjunto difuso que representa la altura de Lucía está centrado en un valor más bajo que el de Alicia (conclusión lógica dado que partíamos de la proposición "Alicia es algo más alta que Lucía").

Operaciones

Composición (∘) $A \circ R = PRY(EC(A) \cap R)$

Herramienta clave para el "razonamiento aproximado"

altura	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
ALICIA	0.0	0.1	0.4	0.7	1.0

'Alicia es algo más alta que Lucía'

altura	1.70	1.725	1.75	1.775	1.80
LUCÍA	0.7	0.7	1	0.7	0.4

Acabamos de describir un mecanismo que nos permite realizar deducciones usando conjuntos difusos…

Operaciones

La composición de relaciones difusas binarias
puede verse como una multiplicación de matrices
en la que sustituimos
el producto por el mínimo y la suma por el máximo:

$$R = P \circ Q$$

$$[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}]$$

$$r_{ij} = max_k min\,\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

Operaciones

EJEMPLO

$$\begin{bmatrix} .3 & .5 & .8 \\ 0 & .7 & 1 \\ .4 & .6 & .5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} .9 & .5 & .7 & .7 \\ .3 & .2 & 0 & .9 \\ 1 & 0 & .5 & .5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .3 & .5 & .5 \\ 1 & .2 & .5 & .7 \\ .5 & .4 & .5 & .6 \end{bmatrix}$$

$$R = P \circ Q$$

$$[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}]$$

$$r_{ij} = max_k min\,\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

Operaciones

El ejemplo visto utiliza la **composición max-min** (la más usual en las aplicaciones de los sistemas difusos):

$$R = P \circ Q$$

$$[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}]$$

$$r_{ij} = max_k min\,\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

Se puede sustituir el mínimo por una t-norma i para generalizar la composición max-min: **composición sup-i**

$$R(X,Y) = P(X,K) \circ Q(K,Y) = sup_k\; i(p_{xk}, q_{ky})$$

Bibliografía

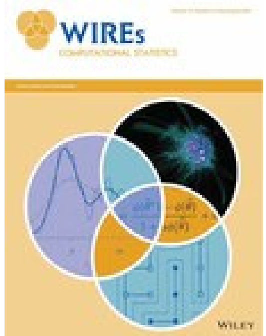
Miguel Delgado:
Apuntes de Inteligencia Computacional
Universidad de Granada, hasta el curso 2021/2022

Sesiones grabadas en vídeo, curso 2020/2021:
https://elvex.ugr.es/decsai/computational-intelligence/video/fuzzy/

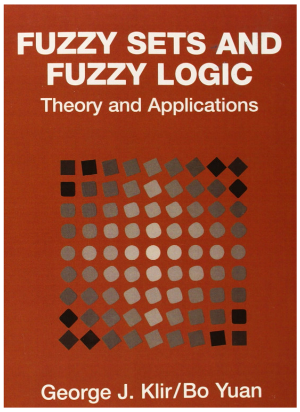
Bibliografía recomendada

Lógica Difusa

- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory,
  WIREs Computational Statistics,
  John Wiley & Sons, 2:3, May/June 2010.
  DOI 10.1002/wics.82



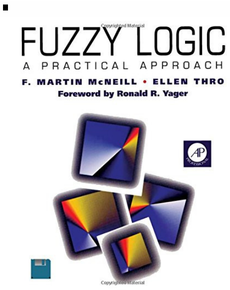
- George J. Klir & Bo Yuan:
  **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic:
  Theory and Applications**,
  1st edition, Prentice Hall, 1995.
  ISBN 0131011715



Bibliografía complementaria

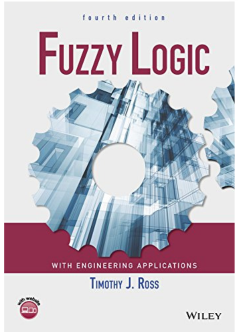
Lógica y Sistemas Difusos

- Rudolf Kruse, Joan E. Gebhardt & Frank Klawonn:
  Foundations of Fuzzy Systems.
  John Wiley & Sons, 1994. ISBN 047194243X.
- Witold Pedrycz & Fernando Gomide:
  An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design.
  MIT Press, 1998. ISBN 0262161710.
- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory and Its Applications,
  Springer, 3rd edition, 1996. ISBN 0792396243
  Springer, 4th edition, 2001. ISBN 9401038708.
- F. Martin McNeill & Ellen Thro:
  Fuzzy Logic: A Practical Approach.
  Morgan Kaufmann, 1994. ISBN 0124859658.



Bibliografía complementaria

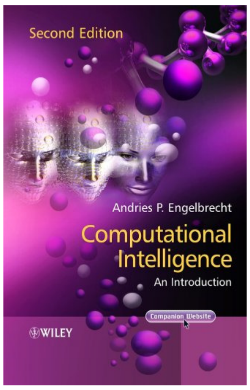
Lógica y Sistemas Difusos

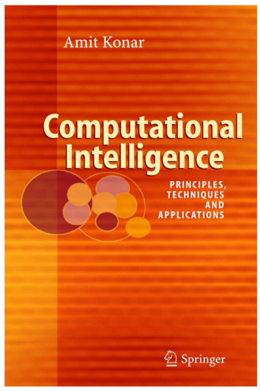


- Timothy J. Ross:
  Fuzzy Logic with Engineering Applications,
  4th edition, John Wiley & Sons, 2017. ISBN 1119235863.
- Lofti A. Zadeh: **Fuzzy Sets**.
  Information and Control, volume 8, issue 3, pp. 338-353,
  June 1965. DOI 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- James C. Bezdek: **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms**. Plenum Press, 1981. ISBN 0306406713.
- Bart Kosko: **Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence**. Prentice Hall, 1992. ISBN 0136114350
- Mohammad Jamshidi, Nader Vadiee & Timothy Ross (editors): **Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications**. Prentice Hall, 1993. ISBN 0133342514.

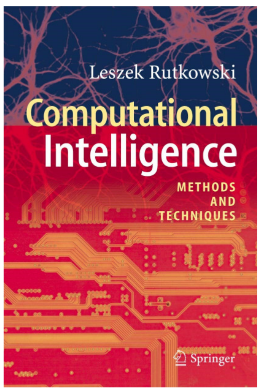
Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional





- Andries P. Engelbrecht:
  Computational Intelligence.
  An Introduction,
  2^{nd} edition, John Wiley, 2007.
  ISBN 0470035617.
- Amit Konar:
  Computational Intelligence.
  Principles, Techniques and Applications,
  Springer Verlag, 2005.
  ISBN 3540208984.
- Leszek Rutkowski:
  Computational Intelligence.
  Methods and Techniques,
  Springer Verlag, 2008.
  ISBN 3540762876.



Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional

- James M. Keller, Derong Liu & David B. Fogel: **Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation**, Wiley - IEEE Press, 2016. ISBN 1119214343
- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim, Matthias Steinbrecher, Frank Klawonn & Christian Moewes: **Computational Intelligence: A Methodological Introduction**. Springer, 2nd edition, 2016. ISBN 1447172949